

4. FFT アナライザのパワースペクトル表示

FFT アナライザでパワースペクトルを表示する場合、表示最高周波数の 2.56 倍がサンプリング周波数です。これは小野測器の技術陣が著した「やさしい FFT アナライザの使い方」(オーム社)に記載されており、随分前になりますが HP (現アジレント・テクノロジー) の 3582A で私も確認しました。

例を挙げると、表示範囲が 0~1.25kHz ならサンプリング周波数 Δf は $1.25k \times 2.56 = 3.2kHz$ です。ナイキスト周波数は 1.6kHz です。表示は通常 800 ポイントなのでサンプリング数 N はその 2.56 倍の 2048 になります。周波数分解能は $\Delta f/N = 3.2kHz/2048 = 1.25kHz/800 = 1.5625Hz$ となります。(周波数分解能はカーソルで 1 サンプルずつ送って周波数を読み取ることで確認できます。この例では 156.2Hz、157.8Hz、159.4Hz、160.9Hz、162.5Hz と変化しました。)

このように、表示範囲の上限周波数はナイキスト周波数より低いわけです。測定しようとする信号周波数成分は、ナイキスト周波数より低く アナライザの表示範囲内であることを想定していることとなります。

DFT の結果をそのまま使って、ナイキスト周波数以上の成分を無視すると、この表示範囲のパワースペクトルの和は時間軸上の信号パワーの半分以下ということになってしまいます。実際の FFT アナライザではナイキスト周波数より上の成分を無視する代わりにナイキスト周波数以下の成分のパワーを 2 倍にして表示しています。パワースペクトルに表示された成分の和が信号パワーにならないと不自然なので、このようにしたものと思われれます。

MaTX を使って パワースペクトルの扱い方を整理してみます。

次のような 3 つの正弦波 400Hz、800Hz、1280Hz の合成信号を作ります。

```
xn=sin(2*PI*400*t)+2*sin(2*PI*800*t)+2*sin(2*PI*1280*t);
```

この信号のパワー (実効値の自乗和) は正弦波の o-p 値がそれぞれ 1V、2V、2V なので、

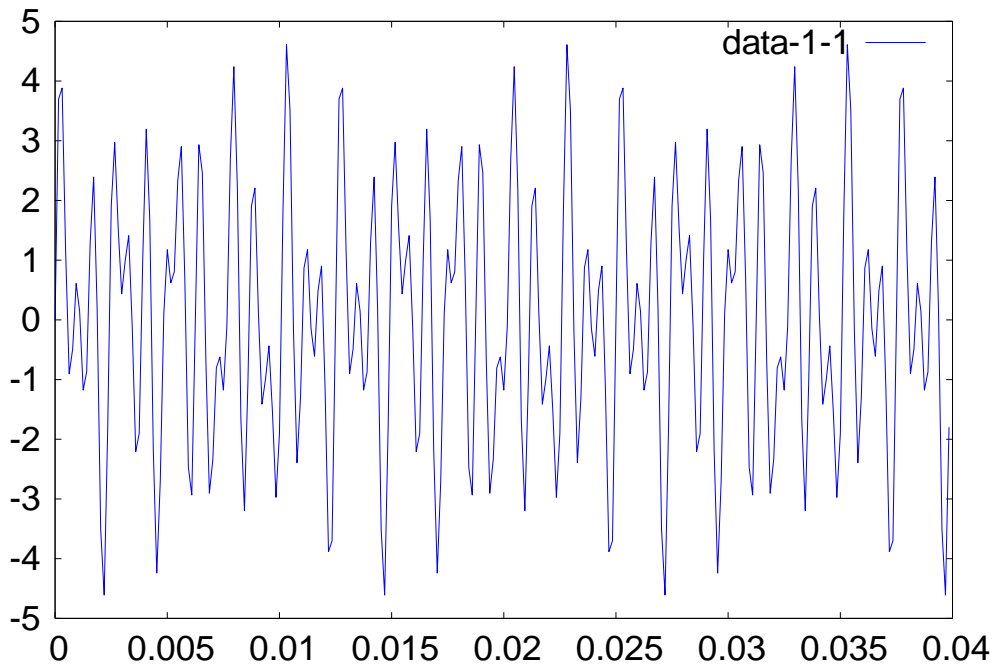
$$(1^2 + 2^2 + 2^2) / (\sqrt{2})^2 = 4.5 [V_{rms}^2] \text{ です。}$$

この信号を 6.4kHz でサンプリングして 256 個のデジタルデータにします。

MaTX のプログラムにすると、

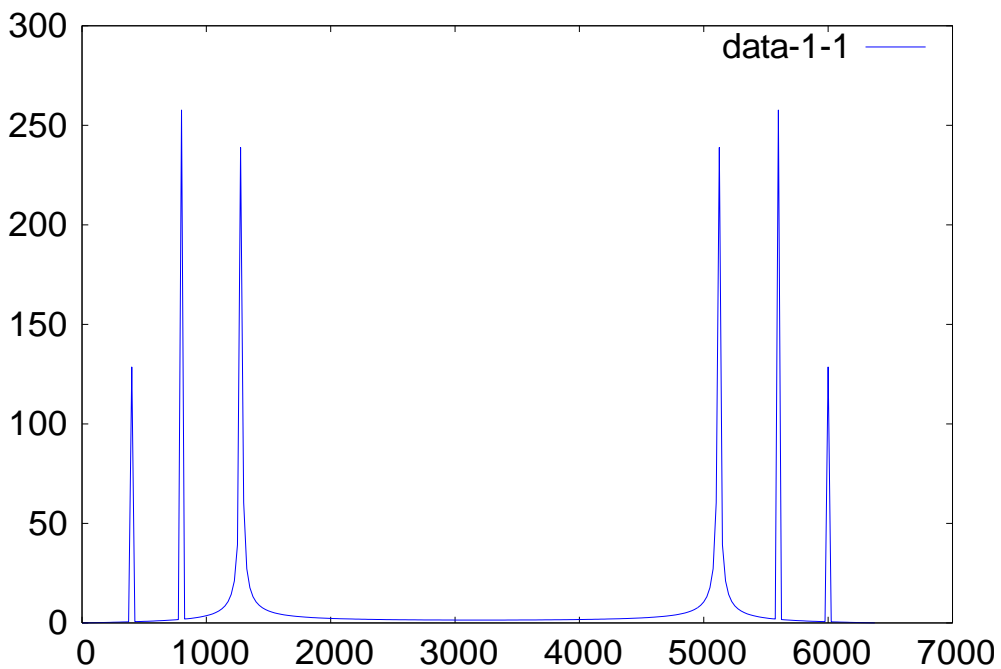
```
Fs=6400.0; // サンプリング周波数 6.4kHz
N=256; // サンプル数
Freq_step=Fs/N; // 周波数ステップ = 周波数分解能は 25Hz になります。
t=[0:N-1]/Fs; // N 個のサンプリング時刻列をつくります。
xn=sin(2*PI*400*t)+2*sin(2*PI*800*t)+2*sin(2*PI*1280*t);
// N 個の信号列を計算
// 次に gnuplot を呼び出して xn をグラフに表示します。
mgplot_reset(1);
mgplot_title(1,"Time domain waveform Plot");
mgplot(1,t,xn);
```

Time domain waveform Plot



```
Sx=fft(xn,N);           //fft でデジタルフーリエ変換します。  
ASx=abs(Sx);           //各周波数成分の絶対値を計算します。  
f=Freq_step*[0:N-1];  
                        // 次に gnuplot を呼び出して ASx をグラフに表示します。  
mgplot_reset(2);  
mgplot_title(2,"Discrete FFT Plot");  
mgplot(2,f,ASx);
```

Discrete FFT Plot



周波数成分の振幅は 0-p 値の N/2 倍（この例では 128 倍）に見えます。たとえば 800Hz 成分は 2V0-p なので、256 にみえます。400Hz 成分は 1V0-p なので、128 です。1280Hz 成分は周波数刻み 25Hz の整数倍 1275Hz からずれているので、少し小さくなり、広がって見えます。ナイキスト周波数はサンプリング周波数 6.4kHz の 1/2 で 3.2kHz です。6kHz、5.6kHz、5.12kHz の成分はそれぞれ、400Hz、800Hz、1280Hz 成分をナイキスト周波数で折り返した形になっています。

パワーを計算してみると、

$$P_{xn} = \text{sum}(x_n * x_n) / N$$

これは「信号列を項毎に自乗して和をとり N で割る」式です。答えは $P_{xn} = 4.52321$ になりました。元のアナログ信号の自乗平均は $4.5V_{rms}^2$ ですから、少しずれています。

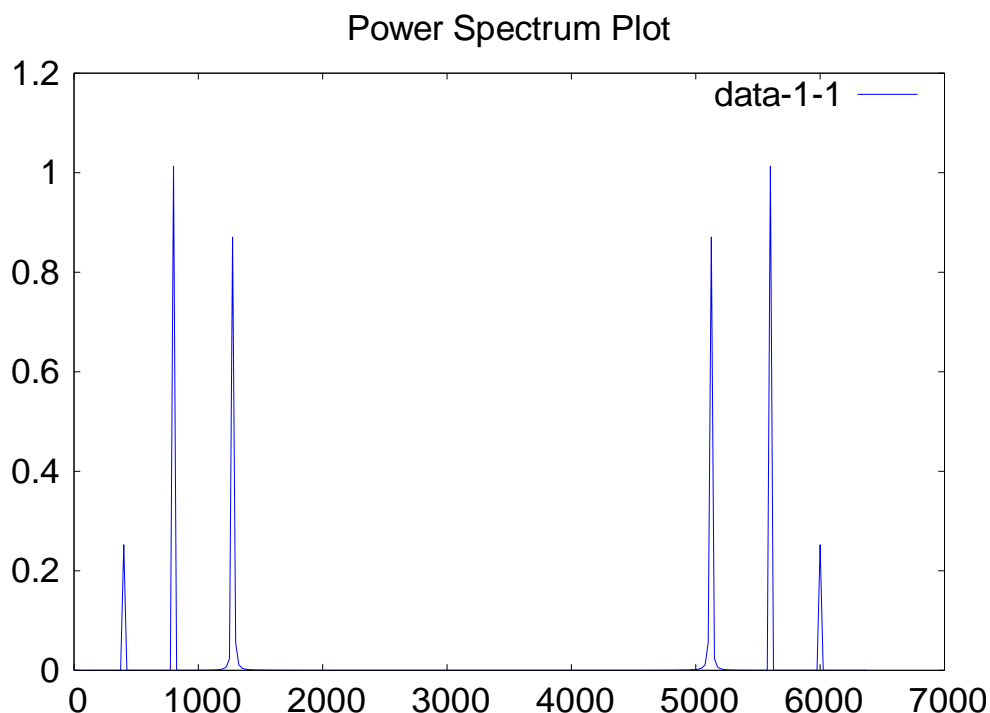
次にパワースペクトルを計算します。パーセバルの等式のところで述べたように和がパワーになるように N^2 で割ってノーマライズしておきます。（ N^2 は N^2 と同じで N の自乗を意味します。MaTX では N^2 ではなく N^2 と記述します）

$$P_{xx} = \text{Re}(S_x * \text{conj}(S_x)) / (N^2); \quad // \text{conj}() \text{ は共役複素数を計算する関数です。}$$

$$P_{ps} = \text{sum}(P_{xx})$$

フーリエ変換後の周波数成分の自乗和は $P_{ps} = 4.52321$ となり、時間軸上の値と一致します。gnuplot を呼び出して P_{xx} をグラフに表示させると、

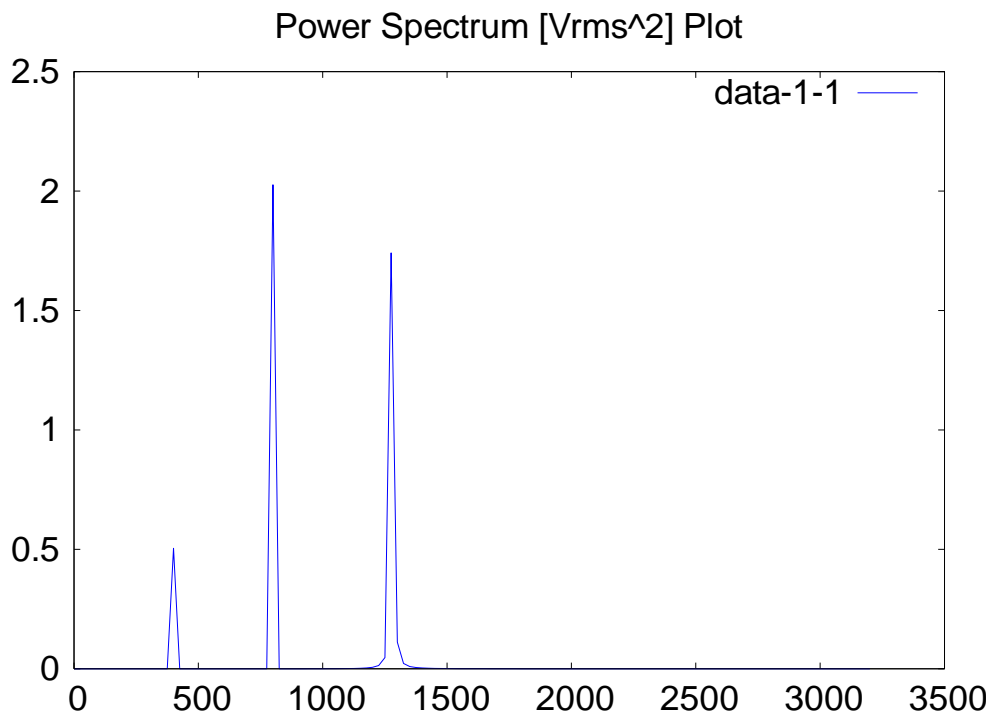
```
mgplot_reset(3);  
mgplot_title(3,"Power Spectrum Plot");  
mgplot(3,f,Pxx);
```



周波数成分の振幅は「0-p 値の N/2 倍」の自乗の $1/N^2$ 、すなわち 0-p 値の自乗の $1/4$ になります。800Hz 成分は $2V_0-p$ でしたから、 $1V_0-p^2$ です。少し大きく見えるのは、256 個のデータが元の信号周期にぴったり対応していないためでしょう。(1280Hz 成分を除いた信号では丁度 $1V_0-p^2$ になります。)

ナイキスト周波数より上を表示しても折り返しになっているので、冗長です。(先に述べたように FFT アナライザではサンプリング周波数の $1/2.56$ までしか表示しません。) そこでナイキスト周波数より上の成分のパワーは折り返したときに対応するナイキスト周波数以下の成分に加えて、表示しないようにします。ナイキスト周波数以下の各周波数ポイントのパワーは 2 倍になります。ただし、DC 成分とナイキスト周波数成分は対応する折り返し成分がないので元のままです。これをフルパワースペクトル (両側パワースペクトル) と区別する場合は片側パワースペクトルと呼んでいるようです。

```
PS=2*Pxx(1:N/2+1); //各成分のパワーを 2 倍にする
PS(1)=Pxx(1); //DC 成分は元のまま
PS(N/2+1)=Pxx(N/2+1); //ナイキスト周波数成分も元のまま
mgplot_reset(4);
mgplot_title(4,"Power Spectrum [Vrms^2] Plot");
mgplot(4,f(1:N/2+1),PS);
```



振幅は「0-p 値の自乗の $1/2$ 」 = 「実効値の自乗」になっています。したがって単位は V_{rms}^2 です。これは FFT アナライザのパワースペクトル密度 PSD (power spectral density) 表示で単位を V_{rms}^2 にした場合に相当します。

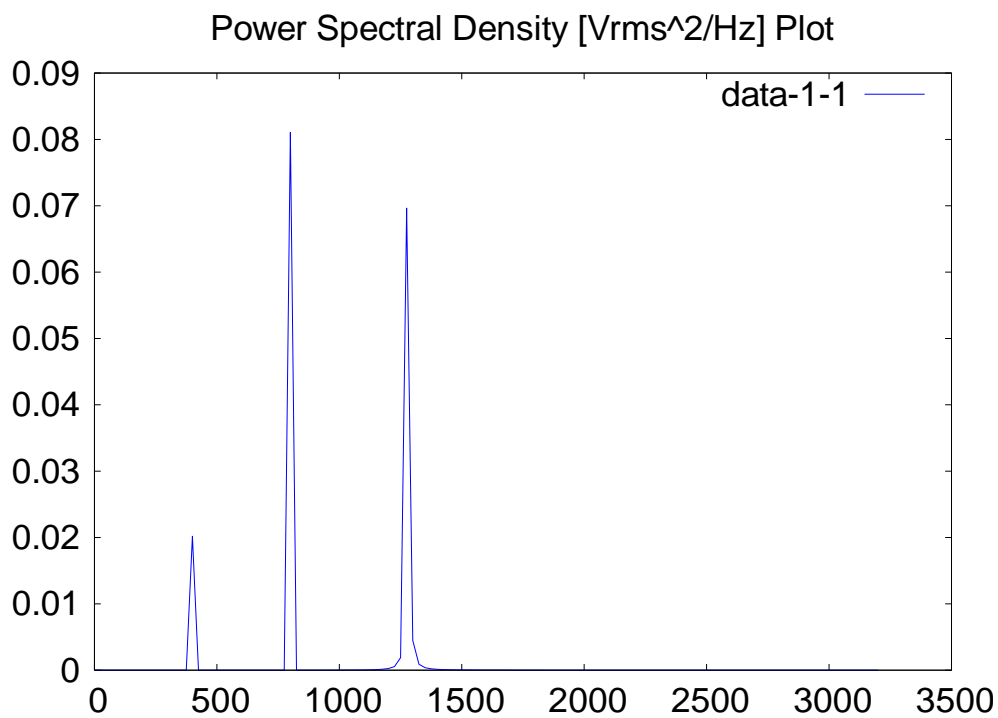
この例では 800Hz 成分は $(\sqrt{2}V_{rms})^2=2[V_{rms}^2]$ 、400Hz 成分は $0.5[V_{rms}^2]$ ですが、800Hz

成分は若干大きく見えています。

V_{rms}^2 単位の PSD を周波数分解能（周波数刻み） $\Delta f = F_s/N$ で割れば、 V_{rms}^2/Hz 単位になります。（窓関数を用いる場合は後述するように帯域幅補正係数を Δf に掛けた等価帯域幅で割ります。）

今例に挙げているような線スペクトルの場合には、この表現は余り意味がありませんが、周波数成分が広がったノイズの場合は線スペクトルではないので V_{rms}^2/Hz で扱う方が合理的です。この単位の場合 Power Spectral Density (PSD) という用語がぴったりです。

```
PSD=PS/Freq_step;
mgplot_reset(5);
mgplot_title(5,"Power Spectral Density [Vrms^2/Hz] Plot");
mgplot(5,f(1:N/2+1),PSD);
```



この V_{rms}^2/Hz 単位の PSD の場合、総パワーの計算は PSD の各成分の和に周波数分解能を掛ける必要があります。

FFT アナライザでは、 V_{rms}^2/Hz の 1/2 乗である V_{rms}/\sqrt{Hz} でスペクトル振幅を表示することもあります。この場合 dB 表示にすると、どちらの単位でも同じ値になります。

パワーは $10\log(V_{rms}^2/Hz)$ で dB に変換し、電圧 V_{rms}/\sqrt{Hz} は $20\log(V_{rms}/\sqrt{Hz})$ で dB にするので、同じ結果になるわけです。