１．パワースペクトラムとは

スペクトルはフランス語から来ており、対応する英語はスペクトラム（spectrum）です。
パワースペクトルとは信号がもつ有限時間区間のエネルギ（パワー）を周波数成分に分解して表現したものです。
パワースペクトル＝パワースペクトラム（power spectrum）は、多くの場合正確にはパワースペクトル密度 PSD（power spectral density）のことです。

２．デジタルフーリエ変換／FFT に関する基本事項

デジタルフーリエ変換（DFT）の公式は　時間軸上の離散データを x(n)、周波数軸上の値を X(k)と書くと、

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$ ここに k=0,1,2,---N-1

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j2\pi kn/N}$$ ここに n=0,1,2,---N-1

時間軸上の信号のパワーは周波数軸上のパワースペクトルの総和と一致します。（パーセバル（Parseval）の等式）同じものを別の視点から見ているだけなので、これは当然でしょう。

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$$

信号の自乗平均パワーP は、データ数 N で割って、$P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$

パワースペクトルを$1/N^2$でノーマライズしておくと　和がそのままパワーになって都合がよいことが分かります。x(n)の単位が[V]のときは、P の単位は[Vrms²]になります。

DFT は N 個（FFT で計算するにはNは２の冪）の時間軸データを周波数軸上の N 個のデータに変換します。変換された周波数軸上のデータの 1 番目は DC 成分です。N/2+1 番目がサンプリング周波数の 1/2 であるナイキスト周波数成分です。それより上の残りの成分は DC とナイキスト周波数の間の成分をナイキスト周波数で折り返して共役複素数にした値になっています。
したがって、ナイキスト周波数より上の成分 N/2+2 番目～N 番目の成分はナイキスト周波数以下の成分から復元できます。

３．実例による確認

以上のことを、フリーソフトである MaTX を使って確認してみます。（Matlab を使いたいところですが、個人で所有するには高すぎます。）

x=[0,5,4,8,-8,2,0,0]　で 8 個の時系列データを用意し、X=fft(x)　を実行すると

（以下は MaTX インタプリタの実行結果です。MaTX(6)、MaTX(7)などはプロンプトです。）

```
        MaTX Interpreter (matx)
        Windows9x/ME/NT/2000/XP(Borland C++) version 5.3.33
        last modified Mon May 15 17:00:46 JST 2006
        Copyright (C) 1989-2006, Masanobu Koga

        Send bugs and comments to matx@matx.org
        Type 'quit' to exit, 'help' for functions, 'demo' for demonstration.

 MaTX (6) x=[0,5,4,8,-8,2,0,0];
 MaTX (7) X=fft(x)
  === X ( 1 x 8) CoMatrix ===
        [ ( 1)-Real            ( 1)-Imag ]   [ ( 2)-Real           ( 2)-Imag ]
  ( 1)  1.10000000E+01  0.00000000E+00  4.46446609E+00  -1.17781746E+01
        [ ( 3)-Real            ( 3)-Imag ]   [ ( 4)-Real           ( 4)-Imag ]
  ( 1)  -1.20000000E+01  1.00000000E+00  1.15355339E+01  -3.77817459E+00
        [ ( 5)-Real            ( 5)-Imag ]   [ ( 6)-Real           ( 6)-Imag ]
  ( 1)  -1.90000000E+01  0.00000000E+00  1.15355339E+01  3.77817459E+00
        [ ( 7)-Real            ( 7)-Imag ]   [ ( 8)-Real           ( 8)-Imag ]
  ( 1)  -1.20000000E+01  -1.00000000E+00  4.46446609E+00  1.17781746E+01
```

N=8 個のデータをデジタルフーリエ変換しました。第１項が DC 成分で、虚数部はゼロになっています。また N/2+1 番目である第５項はナイキスト周波数成分で、これも虚数部がゼロです。その次の第６項は、ナイキスト周波数成分の第５項を中心に折り返したときに対応する、１つ手前の第４項と共役複素数の関係になっています。同様に第７項は第３項、第８項は第２項の共役複素数です。

上記の例で、更に MaTX を使って、パーセバルの等式を確認してみます。
時間軸上のデータの自乗和を求めると、

```
MaTX (8) P=sum(x.*x)
P = 173
```

フーリエ変換されたデータ列とその共役複素数の列を要素毎に掛けて絶対値の自乗の列を計算し、その要素の総和を求めると、

```
MaTX(9) W=sum(X.*conj(X))
W = (1384,0)
```

上記計算では、答えの W が複素数として表示されており、実数部=1384、虚数部=0 です。
Re( )により実数部だけを取り出して、N=8 で割ると、確かに時間軸上のデータの自乗和 173 と一致します。

```
MaTX(10) Re(W)/N
ans = 173
MaTX(11) exit
```

（exit でインタープリタ終了です。）

信号 x(n)は大抵の場合実数ですが、フーリエ変換された X(k)は上記の例のように一般には複素数であり、多くの場合その絶対値の自乗$|X(k)|^2$を計算して用います。これがパワースペクトルです。(尚、絶対値や絶対値の自乗にしてしまうと、位相情報が失われるので、逆変換して元の時間軸情報に戻すことはできなくなります。)