（追加）

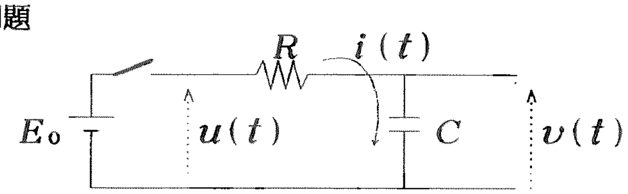
ラプラス変換と伝達関数の例　1993.5.19　杉本
REV.2 1994.5.16

例題によりラプラス変換の利点を示す。

通常の微分方程式の解き方では斉次方程式の特性根を解き、特殊解を求め、初期条件により未定係数を決定する。ラプラス変換を使うと、微分方程式が代数的に機械的に解ける。

次に同じ例題により伝達関数で $s=j\omega$ と置くと周波数特性になることを示す。

１．例題



上記回路（$C\cdot R$一段のローパスフィルタ）の微分方程式をつくって解いてみよう。

$$u(t)=Ri(t)+v(t) \qquad ---①$$

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt} \qquad ---② \quad \text{（コンデンサの理論式）}$$

②を①式に代入してｉを消去し、微分項を左辺に持ってくると

$$\frac{dv(t)}{dt}=-\frac{v(t)}{CR}+\frac{u(t)}{CR} \qquad ---③$$

③が任意の $u(t)$ を加えたときの $v(t)$ の微分方程式である。この微分方程式をこの回路の状態方程式と呼ぶ。

$u(t)$ がステップ関数（$t=0$ でスイッチがはいって E_0 になる）の場合について、これをまず通常の微分方程式の解き方で解いてみて、次にラプラス変換で解く。

２．微分方程式の解

微分方程式の解は特殊解と $u(t)\equiv 0$ と置いた斉次方程式の一般解の和である。

$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{CR}=0$　の一般解を　$v(t)=Ae^{pt}$ と仮定する。代入すると

$p+1/CR=0$ となるので　$p=-1/CR$ を得る。

よって一般解は　$v(t)=Ae^{-t/CR}$

一方　$0\leqq t$ において $u(t)=E_0$ だから　$v(t)=E_0$ が特殊解であることが分かる。

従って微分方程式の解は　$v(t)=Ae^{-t/CR}+E_0$

初期条件　$v(0)=0$　を満たすためには　$v(0)=A+E_0$ より $A=-E_0$

故に微分方程式の解は　$v(t)=E_0(1-e^{-t/CR})$ 　---④

３．ラプラス変換による解

次にラプラス変換で解く。

③式を公式を使って機械的にラプラス変換すると

$$sV(s)-v(0)=-\frac{V(s)}{CR}+\frac{U(s)}{CR}$$

$u(t)$のラプラス変換$U(s)$は$u(t)$がステップ関数で

$$\left.\begin{aligned} u(t)&=0 \quad (t<0)\\ &=E_0 \quad (t\geqq 0)\end{aligned}\right\}\text{だから}\quad U(s)=E_0/s$$

よって
$$sV(s)-v(0)=-\frac{V(s)}{CR}+\frac{E_0}{sCR}$$

これを代数的に$V(s)$について解き

$$V(s)=\frac{E_0/CR}{s(s+1/CR)}+\frac{v(0)}{s+1/CR}\quad ---⑤$$

初期条件　$v(0)=0$ だから第２項は消える。第１項を部分分数に展開して

$$V(s)=E_0\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/CR}\right)$$

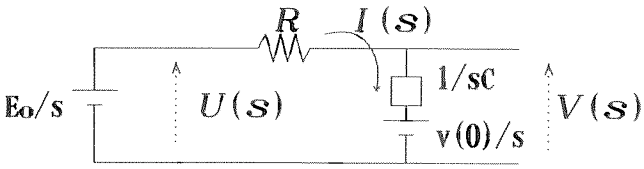
これを逆ラプラス変換して　$v(t)=E_0(1-e^{-t/CR})$

以上は微分方程式をラプラス変換したが、回路図に直接ラプラス変換を当てはめると微分方程式を経ることなくオームの法則だけで代数的に$V(s)$の式を得ることができる。

すなわち②式のラプラス変換　$I(s)=C\{sV(s)-v(0)\}$ からコンデンサの電位差のラプラス変換$V(s)$は

$$V(s)=\frac{I}{sC}+\frac{v(0)}{s}$$

I(S)



上図から直接⑤式が計算できる。

４．伝達関数

ラプラス変換で初期値を０と置き、$V(s)/U(s)$を求めると

$$V(s)/U(s)=1/(1+sCR)\quad ---⑥$$

これがＣ・Ｒ一段のローパスフィルタの伝達関数である。

５．正弦波入力に対する応答

ステップ入力に対する応答は④式であったが、$u(t)=\sin(\omega t)$　$(t\geqq 0)$ の場合はどうなるか、ラプラス変換で計算してみる。

ラプラス変換表により、

$$U(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

初期値は$v(0)=0$としておく。⑥式から　$V(s)=\dfrac{\omega}{(s^2+\omega^2)(1+sCR)}$

これを部分分数に展開すると、

$$V(s)=\frac{K_1 s+K_2}{s^2+\omega^2}+\frac{K_3}{1+sCR}$$

ここに　$K_1=-CR\omega/\{1+(CR\omega)^2\}$

$K_2=1/\{1+(CR\omega)^2\}$

$K_3=CR\omega\cdot CR/\{1+(CR\omega)^2\}$

これを逆ラプラス変換して整理すると

$$V(t)=\frac{1}{\sqrt{1+(CR\omega)^2}}\{\sin(\omega t-\alpha)+\sin(\alpha)e^{-t/CR}\}$$

ここに　$\alpha=\arctan(CR\omega)$

やや面倒になったが以上は手計算で計算できる。得られた結果を吟味すると、

時間経過とともにexpの項は減衰して消える。　したがって十分時間がたった後の定常解は

振幅が入力の$1/\sqrt{1+(CR\omega)^2}$倍で位相が入力に対してαだけ遅れる。

ところで伝達関数⑥式のsに$s=j\omega$と置いた次式⑦は複素平面上で振幅と位相がまさにこの定常解に一致している。

$$F(j\omega)=V(j\omega)/U(j\omega)=1/(1+j\omega CR)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+(CR\omega)^2}}e^{-j\alpha}\quad ---⑦$$

すなわち周波数応答は伝達関数で$s=j\omega$と置いたものである。

==

＜補足＞　フーリエ変換とラプラス変換

ラプラス変換の定義は　$F(s)\equiv\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

フーリエ変換の定義は　$F(\omega)\equiv\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-j\omega t}dt$

（１）　インパルス応答のラプラス変換が伝達関数である。

信号$x(t)$に対し信号$y(t)$を出すような変換Tのうち、次の性質を満たすものを線形システムという。

Ｓ１。$y1=Tx1$、$y2=Tx2$のとき$T(x1+x2)=y1+y2$

Ｓ２。$c\in K$（複素数体）のとき　$T(cx)=cT(x)$

線形時不変システムΦへの入力$x(t)$と出力$y(t)$のラプラス変換を$X(s)$、$Y(s)$とする。これらの比$H(s)=Y(s)/X(s)$をシステムΦの伝達関数と呼ぶ。インパルスのラプラス変換は１なので（１）の命題が成り立つ。

（２）　インパルス応答のフーリエ変換が周波数伝達関数である。

安定な線形時不変システムでは$u(t)=A\sin\omega t$を加えたときの出力は定常状態では同一周波数の正弦波となり$y(t)=B\sin(\omega t+\theta)$と表わされる。

周波数の関数としてのB/A（ゲイン特性）とθ（位相特性）を周波数特性という。

$t=0$で入力$u(t)$を加えたとき$u(t)$と出力$y(t)$にフーリエ変換が存在するならそれらのフーリエ変換の比が周波数伝達関数である。

（３）　ラプラス変換が存在してもフーリエ変換が存在するとは限らない。

$t<0$で$f(t)=0$となる$f(t)$のフーリエ変換が存在するためには積分

$\int_0^\infty |f(t)|\,dt$　が収束することが条件になっている。

t、t^2、$\sin\omega t$、$e^{j\omega t}$ などでさえ上記積分は発散してしまう。

（４）　フーリエ変換が存在するならラプラス変換において$s=j\omega$と置くとフーリエ変換が得られる。

周期関数（例えば$\sin\omega t$や$e^{j\omega t}$）には通常の意味でのフーリエ変換は存在しないが、フーリエ級数には展開できる。一方、フーリエ級数はフーリエ変換の特別な場合として導くことができる。周期関数のフーリエ変換は特異関数であるデルタ関数を用いれば次のように書くことができる。

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{j\omega_0 t} \quad \text{のとき} \quad F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

このような例として複素指数波信号$e^{j\omega_0 t}$を考えてみる。

ラプラス変換は$1/(s-j\omega_0)$である。　ここで$s=j\omega$と置いてもフーリエ変換にはならない。　正しいフーリエ変換は$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$であり、線スペクトルになる。

以上