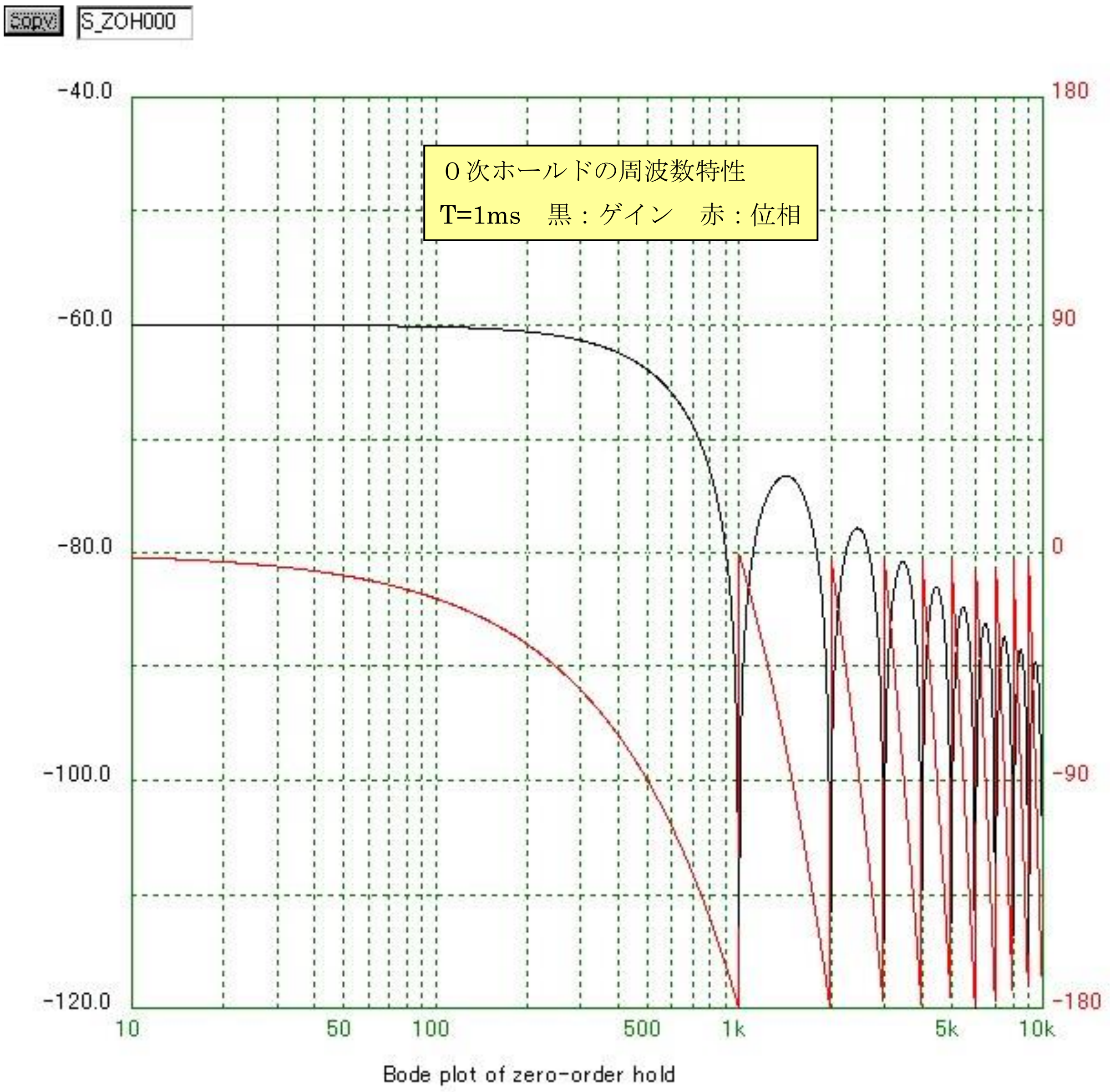
サンプル＆ホールドの伝達関数に関する疑問

サンプル＆ホールドには通常０次ホールドが用いられます。ゼロ次ホールドの伝達関数は$\dfrac{1-e^{-sT}}{s}$です。ゆっくり変化する信号を、サンプル＆ホールド回路に加えたとき、その出力はほぼ原信号に等しい波形になります。したがってサンプル＆ホールドの周波数特性は低域でゲイン１になると考えられます。
しかし、$s=j\omega$と置いてゼロ次ホールドの伝達関数から周波数特性を計算すると、低域のゲインは１（0dB）ではなく、Ｔになります。（下図のようにT=1msなら低域のゲインは0.001＝－60dBです。）
1/Tを掛けないとゲインのつじつまが合わないのですが、これはなぜでしょうか？



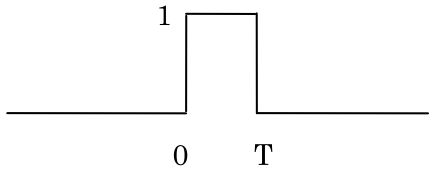
随分前になりますが、アナログ制御の経験しかなかった私がはじめてデジタル制御の設計を始めた頃、アメリカのコンサルタントからデジタル制御の指導を受けたことがあります。
「サンプル＆ホールドの周波数特性は、なぜ$\dfrac{1-e^{-sT}}{s}$でなくて、$\dfrac{1}{T}$が掛かるのでしょうか？」と質問したところ、コンサルタントの答えは

「1/T がないとゲインが合わないよね。私も不思議に思っているが、なぜだか知らない。」
彼も私同様、独学でデジタル制御を修得した人であり、この疑問は未解決のまま残ったのでした。

その後　気づいたことですが、これは０次ホールドとサンプル＆ホールドを同一視していたための混乱でした。
０次ホールドの伝達関数は１回の０次ホールド動作（ホールド時間 T 秒）を表しています。しかし実際に回路として使われるのはサンプル＆ホールドであり、０次ホールドの繰り返しです。
サンプリング周期を T とすると、サンプル＆ホールドでは単位時間（１秒間）に０次ホールドが 1/T 回繰り返されるので、サンプル＆ホールドのゲインは０次ホールドのそれの 1/T 倍になるという風に解釈できると思います。
以下、もう少し理論的な取り扱いをして、1/T がどこから来るのかを見てみます。

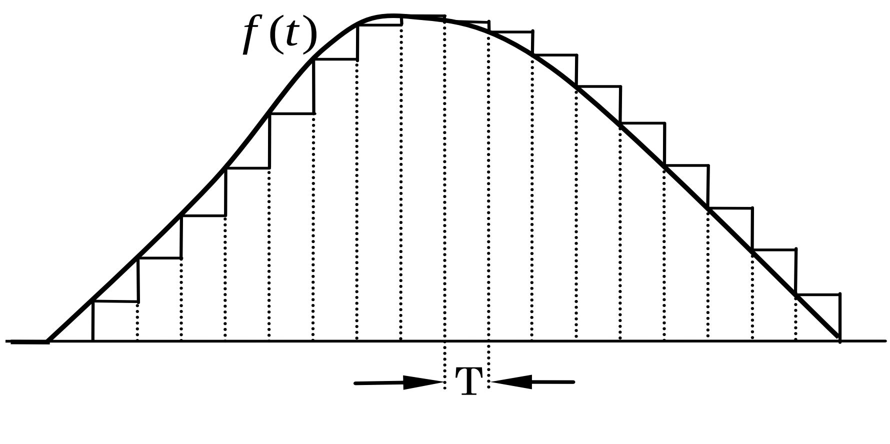
1,　０次ホールドの伝達関数

ラプラス変換 $\dfrac{1}{s}$ の逆ラプラス変換は、時間 t=0 のタイミングで０から１になり、その後は１を保つ単位ステップ関数 u(t)です。
e^{-sT} は、時間を T だけ遅らせる意味なので、$\dfrac{1}{s}e^{-sT}$ は、T 秒遅れた単位ステップ u(t-T)のラプラス変換です。
従って、$\dfrac{1-e^{-sT}}{s}$ は、２つの単位ステップの差分 u(t)-u(t-T) に対応するので、０秒から T 秒間だけ１になる矩形パルスを意味します。これに t=0 の瞬間の入力信号 f(0)を掛ければ、T 秒間のホールド動作になるので、$\dfrac{1-e^{-sT}}{s}$ は確かに０次ホールドの伝達関数です。



２.　サンプル＆ホールドの特性

これに対し、サンプル＆ホールドは下図のように０次ホールドの繰り返しです。



$f(t)$をサンプル＆ホールド回路に加えた入力信号、$g(t)$をその出力（図の階段波形）とすると、

$$g(t)=f(0)\{u(t)-u(t-T)\}+f(T)\{u(t-T)-u(t-2T)\}+f(2T)\{u(t-2T)-u(t-3T)\}+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\{u(t-kT)-u(t-(k+1)T)\}$$

$g(t)$をラプラス変換すると

$$G(s)=L\{g(t)\}=f(0)(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-Ts})+f(T)(\frac{1}{s}e^{-Ts}-\frac{1}{s}e^{-2Ts})+f(2T)(\frac{1}{s}e^{-2Ts}-\frac{1}{s}e^{-3Ts})+\cdots$$
$$=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)e^{-kTs}$$
$$=\frac{1-e^{-Ts}}{s}F^{*}(s)$$

ここに　$F^{*}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)e^{-kTs}$ です。（$F^{*}(s)$は$f(t)$のスター変換と呼ばれます。）

結局サンプル＆ホールドは０次ホールドの伝達関数に$F^{*}(s)$を掛けたものであり、両者は区別しなければなりません。

$F^{*}(s)$は理想サンプラーのサンプリング動作を表しており、理想サンプラー＋０次ホールドがサンプル＆ホールドだということになります。実際の回路は０次ホールドだけが単独で存在することはなく、必ずサンプラーと一体になっています。

３．　理想サンプラーの特性

この$F^{*}(s)$の逆ラプラス変換は　$f^{*}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$　となります。ここに$\delta(t)$は t=0 でのみ値を持つインパルス関数です。（$\delta(t)$のラプラス変換は１です。）

$f(t)\delta(t-kT)=f(kT)\delta(t-kT)$ なので

$$f^{*}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)=f(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$$

t<0 のとき、$f(t)=0$と考えれば、Σの範囲を k=0～∞ではなく、k=－∞～＋∞と拡大しても同じです。

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$は周期 T の周期関数なので、フーリエ級数で表せるはずです。そのフーリエ級数の係数 Cn を求めると、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn(2\pi t/T)}$$
$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-jn(2\pi t/T)}dt$$

上記 Cn の式において、δが値を持つのは，t=kT の点 t=･･･－3T，－2T，－T，0，T，2T，3T，･･･ですが、Cn を求める積分範囲－T/2～＋T./2 の中にあるのは k=0，t=0 の１点だけです。

$t\to 0$のとき$e^{-jn(2\pi t/T)}\to 1$であり、インパルス関数$\delta(t)$は　値を持つ$\delta(0)$の前後の時間範囲で積分すると１になるので、C_nはすべての n について、$C_n=1/T$となります。

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)=f(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)=f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t)e^{jn(2\pi t/T)}$$

ここで $f^*(t)$ のラプラス変換 $F^*(s)$ をラプラス変換の定義式によって求めると、

$$L(f^*(t))=F^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{jn(2\pi t/T)}e^{-st}dt=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-(s-jn\omega_0)t}dt=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(s-jn\omega_0)$$

ただし、$\omega_0=2\pi/T$

以上の結果をまとめると、理想サンプラーの動作として次の４つの表現が得られます。

$$f^*(t)=f(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT) \qquad \text{--------（１）}$$

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)e^{-kTs} \qquad \text{--------（２）}$$

$$f^*(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t)e^{jn(2\pi t/T)} \qquad \text{--------（３）}$$

$$F^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(s-jn\omega_0) \qquad \text{--------（４）}$$

（３）式と（４）式に 1/T が掛かることに注目してください。

（３）式は、理想サンプラーがサンプリング周波数の整数倍の搬送波を原信号 f(t)で変調した無数の信号群を原信号 f(t)に付け加えること、それらの大きさがすべて同じで原信号の 1/T になることを示しています。

（４）式は、理想サンプラーが原信号の周波数スペクトル F(s)にサンプリング周波数の整数倍だけシフトした無数のスペクトル群を付け加えること、それらの大きさがすべて同じで原信号スペクトルの 1/T になることを示しています。

デジタル処理のため、アナログ信号を AD 変換によってデジタル化する動作は、この理想サンプラーと考えられます。（ただし量子化誤差や処理の遅延は考慮しなければならない場合があります。）

また、（２）式において、$z=e^{Ts}$ と置くと、$F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)z^{-k}\equiv F(z)$ となり、これは Z 変換の定義式です。すなわち理想サンプラーの動作（スター変換）は Z 変換に対応しています。

４.　サンプル＆ホールドの伝達関数

サンプル＆ホールド出力のラプラス変換 $G(s)$ は

$$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}F^*(s)$$

この $F^*(s)$ から $F^*(s)=H(s)F(s)$ のように入力信号 $F(s)$ を分離できれば、$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}H(s)F(s)$ となり、$G(s)/F(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}H(s)$ がサンプル＆ホールドの伝達関数となるわけですが、これまで見てきたように $F^*(s)$ から $F(s)$ を分離できません。したがって、**連続時間系で考えたときサンプル＆ホールドの伝達関数は計算できません。**

伝達関数は線形・時不変の場合に定義されます。サンプル＆ホールドはサンプリングのタイミングをずらすと出力が少し変わり、時不変とは言えないので、厳密には伝達関数が存在しないということになるのです。

５． サンプル＆ホールドの周波数特性

周波数特性（周波数伝達特性）はラプラス変換の変数 s に $s = j\omega = j2\pi f$ を代入して計算できます。$F^*(s)$ に当てはめると、（４）式から

$$F^*(j\omega) = ---+\frac{1}{T}F(j(\omega-2\omega_0))+\frac{1}{T}F(j(\omega-\omega_0))+\frac{1}{T}F(j\omega)$$
$$+\frac{1}{T}F(j(\omega+\omega_0))+\frac{1}{T}F(j(\omega+2\omega_0))+---$$

２チャンネルの FFT を使い、sweptSine 波で伝達特性（ゲイン・位相）を測定する場合を考えると FFT は測定用入力信号の周波数成分だけを取り出して測定するので、$F^*(j\omega)\approx\frac{1}{T}F(j\omega)$ と観測され、理想サンプラーの伝達関数は 1/T であるかのように見えます。このため、サンプル&ホールドの周波数特性測定結果は $\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega T}$ で表されることになります。低域のゲインは１になります。

サンプル&ホールドの伝達関数は０次ホールドの伝達関数に 1/T を掛けた $G(s)/F(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{Ts}$ であるように見えますが、これは近似的なものであり、厳密ではありません。

以上の理解に導いてくれた教科書（訳本）が 2 冊有りました。サンプル＆ホールドの特性についてある程度詳しく書いてあります。どちらも訳本は絶版のようですが、原書は今も 3 版が入手可能です。

「ディジタル制御システム―解析と設計」日刊工業新聞社
Charles L. Phillips (著), H.Troy,Jr. Nagle (著), 横山 隆一 (訳), 貴家 仁志 (訳), 佐川 雅彦 (訳)
「ダイナミックシステムのディジタル制御」森北出版株式会社
G.F.フランクリン, J.D.パウエル, 羽根田 博正訳

Digital Control System Analysis and Design (3rd Edition)
by Charles L. Phillips (Author), H. Troy Nagle (Author)
Digital Control of Dynamic Systems (3rd Edition)
by Gene F. Franklin (Author), J. David Powell (Author), Michael L. Workman (Author)