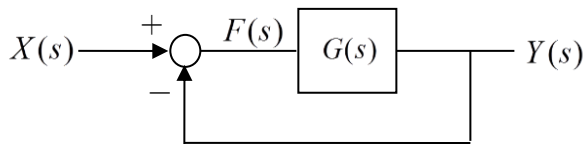
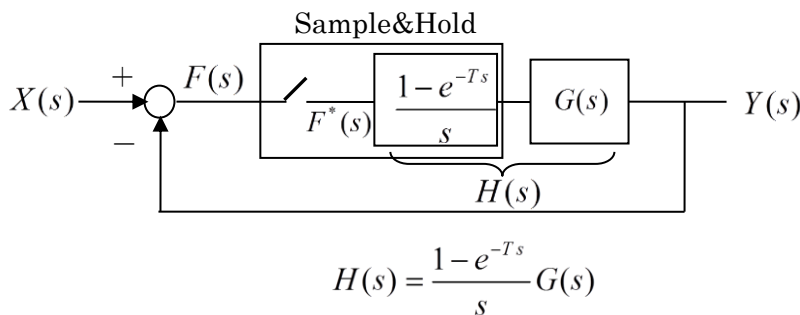


## サンプル&ホールド回路挿入の影響（周波数特性の見え方）

理想サンプラーは入力信号  $F(s)$  を  $F^*(s)$  に変換します。スター変換  $F^*(s)$  は  $z = e^{Ts}$  と置くと Z 変換  $F(z)$  になります。  $F^*(s)$  は基本波成分だけに注目すれば  $F^*(s) \approx \frac{1}{T} F(s)$  に見えるので、周波数特性を測定するときは理想サンプラーの伝達関数を  $1/T$  と見なして全体の伝達関数を求め、  $s=j\omega$  と置いて計算できることを述べました。（実測に対し、よい近似を与えます。）  
ところが、理想サンプラーがフィードバックループ内に挿入された場合は、この近似計算では実測結果と合わないことがあります。その辺りを検討してみましょう。



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$



$$H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} G(s)$$

$$\frac{Y^*(s)}{X^*(s)} = \frac{H^*(s)}{1+H^*(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{X^*(s)} = \frac{H(s)}{1+H^*(s)}$$

サンプル&ホールドを用いないフィードバックループの場合  $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$  ---(a) となります。

サンプル&ホールドを挿入した場合の特性は理想サンプラーの作用であるスター変換  $F^*(s)$  を伝達関数  $1/T$  で近似すると  $\frac{Y(s)}{X(s)} \approx \frac{H(s)/T}{1+H(s)/T}$  ---(b) となります。

近似せずに計算を進めると、

$$Y(s) = F^*(s)H(s)$$

$$F(s) = X(s) - Y(s)$$

$$F^*(s) = X^*(s) - Y^*(s)$$

$$Y^*(s) = \{F^*(s)H(s)\}^* = F^*(s)H^*(s) \quad (\text{この証明は省略})$$

$$= \{X^*(s) - Y^*(s)\}H^*(s)$$

$$\therefore \frac{Y^*(s)}{X^*(s)} = \frac{H^*(s)}{1+H^*(s)} \quad \text{---(1) を得ます。}$$

これは  $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1+H(z)}$  ---(2) と書くこともできます。ただし  $z = e^{Ts}$

$$Y(s) = F^*(s)H(s) = \{X^*(s) - Y^*(s)\}H(s) = X^*(s) \left\{ 1 - \frac{Y^*(s)}{X^*(s)} \right\} H(s)$$

ここに(1)式を代入して、 $Y(s) = \frac{X^*(s)H(s)}{1+H^*(s)}$  ---(3)

(3)式は厳密式です。ここで、周波数伝達特性を測定するとき、入力信号  $X(s)$ として正弦波を加え、出力  $Y(s)$ のその周波数成分だけをフィルタリングして測定すると考えるとサンプラーの伝達関数を  $1/T$  と近似でき、 $\frac{Y(s)}{X(s)} \approx \frac{H(s)/T}{1+H^*(s)}$  ---(c)となります。

最初から近似式を用いて算出した(b)式とループ特性を厳密に計算した後実測の条件を考慮して最後に近似をした(c)式では分母が異なります。

具体例でどの程度の違いが有るかを検証してみます。

例 1.  $G(s) = 2\pi f_0 / s$   $f_0 = 400\text{Hz}$   $T = 0.25\text{ms}$  (サンプリング周波数 4kHz)

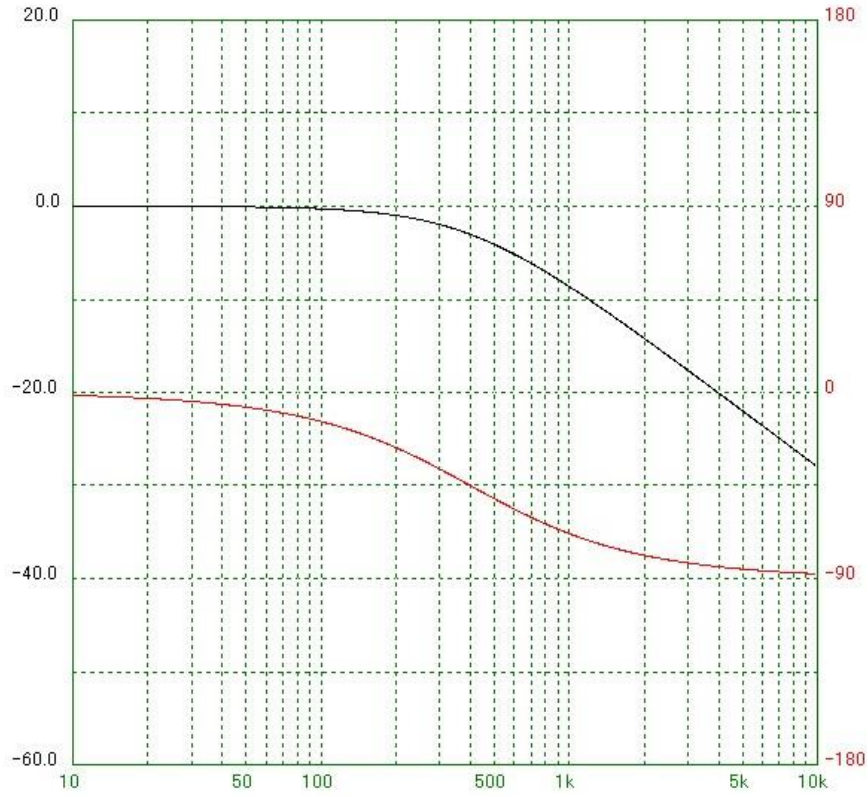
$G(s)$ は積分器です。サンプル&ホールドのない連続系のフィードバックの場合の(a)式は1次ローパスフィルタになります。

$H(s)$ は  $H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} G(s) = \frac{2\pi f_0(1-e^{-Ts})}{s^2}$

$H(z)$ は  $z$ 変換表の  $\frac{1}{s^2} \leftrightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2}$  を利用して、 $H(z) = 2\pi f_0(1-z^{-1}) \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{2\pi f_0 T}{z-1}$

$H^*(s)$ は  $H(z)$ に  $z = e^{Ts}$  を代入したものです。

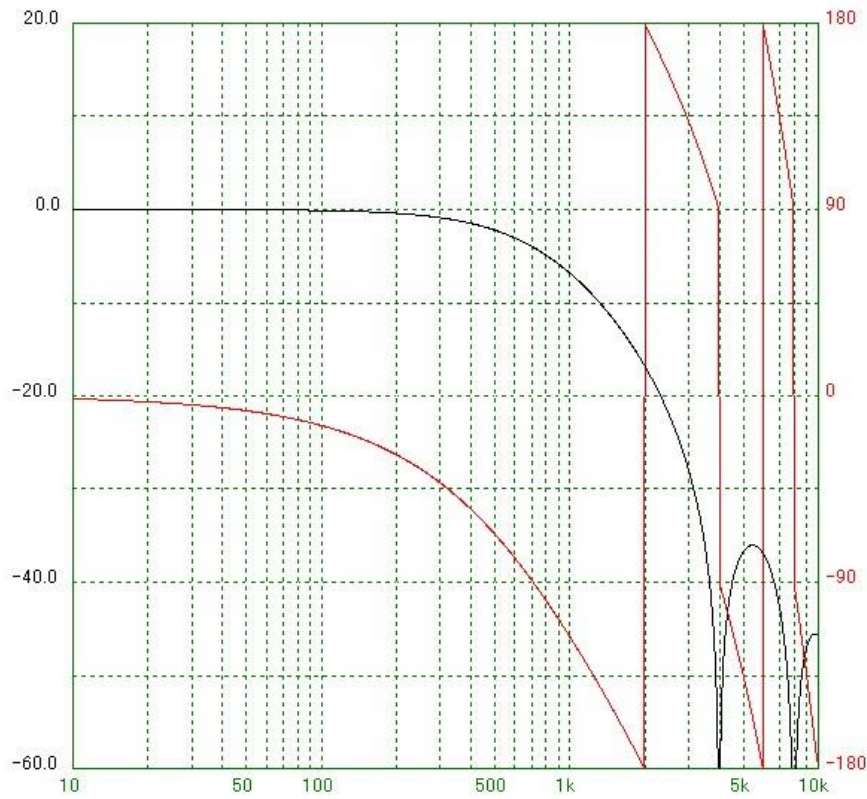
5000 L\_INT000



Bode plot of Loop of Integrator

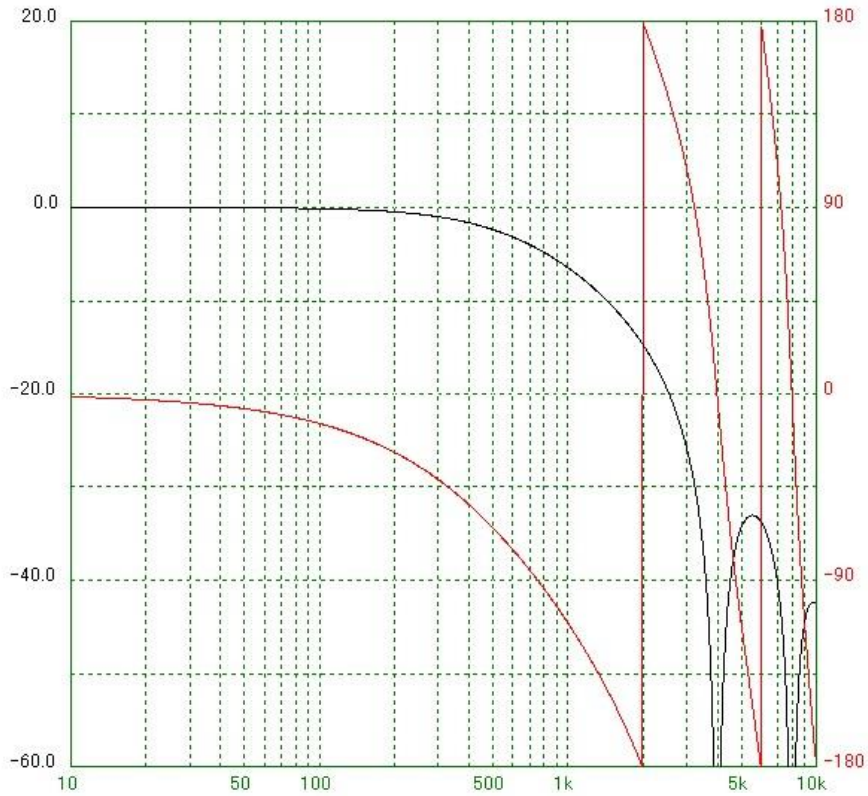
(a)式=積分器のクローズドループ特性

5000 LPF\_SH00



Bode plot of Loop of Int+S&H

(b)式 of 特性



Bode plot of Loop of INT+S&H\* (c)式の特性

例 2.  $G(s) = \frac{(2\pi f_0)^2}{s^2} * \frac{3(s + 2\pi f_0/3)}{s + 2\pi(3f_0)}$   $f_0 = 300\text{Hz}$   $T = 0.25\text{ms}$  (サンプリング周波数 4kHz)

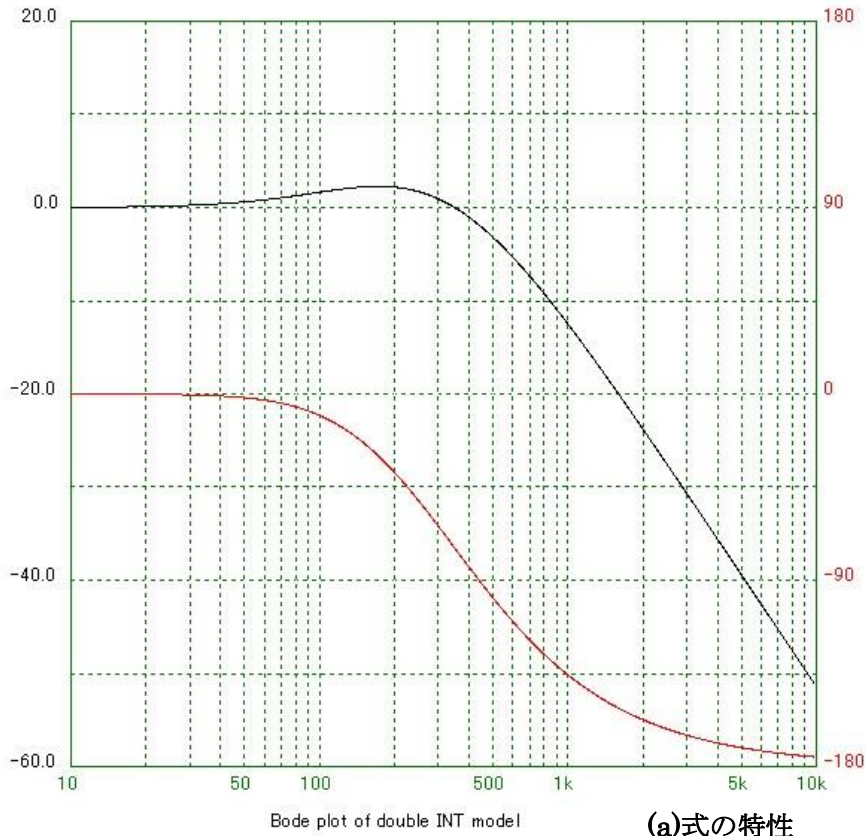
$$H(s) \text{ は } H(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) = \frac{3(2\pi f_0)^2 (1 - e^{-Ts})}{s^3} \frac{(s + 2\pi f_0/3)}{s + 2\pi(3f_0)}$$

$$\frac{s+b}{s^3(s+a)} \text{ を部分分数展開すると、 } \frac{s+b}{s^3(s+a)} = \frac{b-a}{a^3s} + \frac{a-b}{a^2s^2} + \frac{b}{as^3} + \frac{a-b}{a^3(s+a)}$$

この各項を z 変換表によって z 変換します。

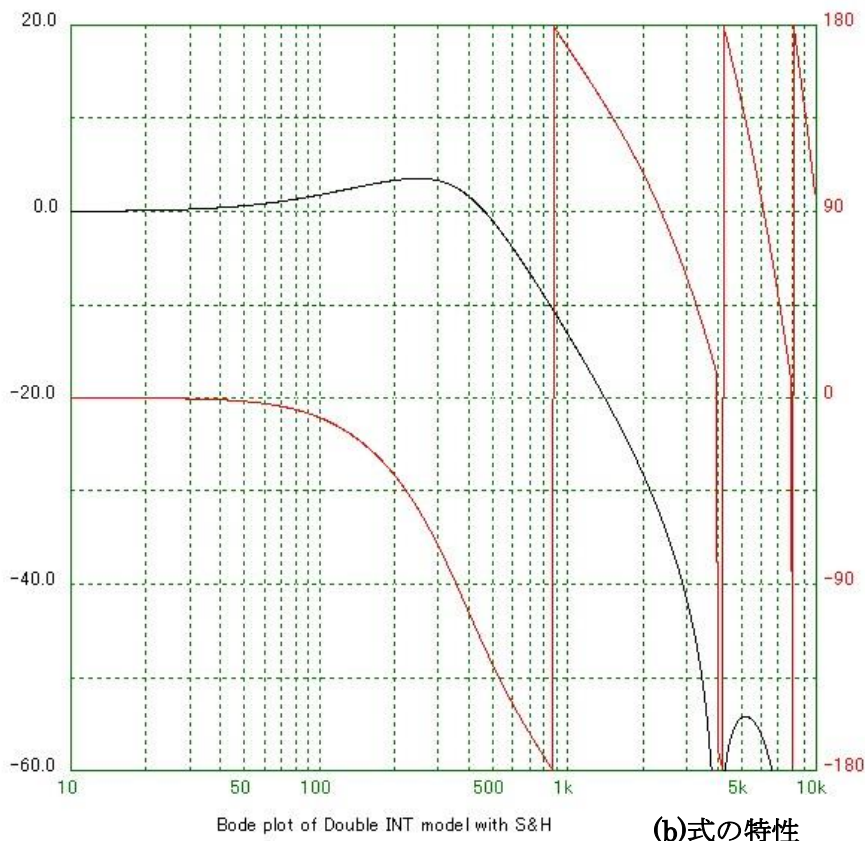
$$\rightarrow \frac{b-a}{a^3(1-z^{-1})} + \frac{a-b}{a^2} \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{b}{a} \frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3} + \frac{a-b}{a^3} \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

SPICE D\_INT001

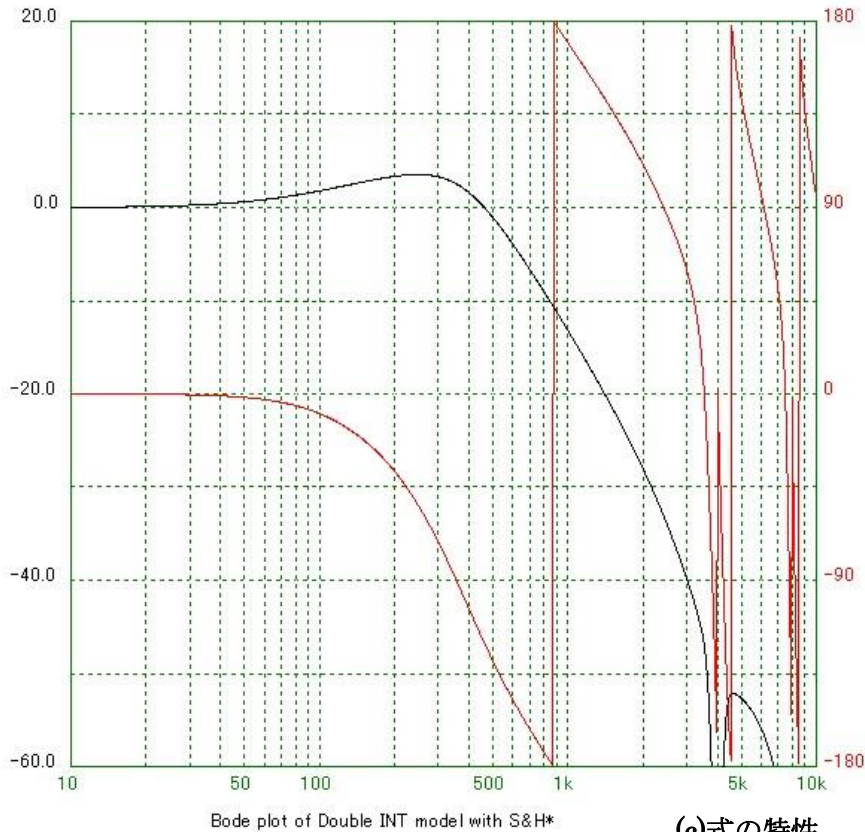


(a)式の特性

SPICE D\_INT002



(b)式の特性



(c)式の特徴

例 1, 例 2 どちらもサンプリング周波数 (4kHz) 近辺の位相特性に相違があります。実測は(b)式より(c)式に近くなりますが、しかし、サンプリング周波数の 1/2=ナイキスト周波数以上の特性がそう観測されるということであり、この違いは余り重要ではありません。

ナイキスト周波数より高い周波数の入力はいくつかのナイキスト周波数より低い周波数の入力に化けてしまいます。例えばサンプリング周波数が 4kHz のとき、3.8kHz の入力信号を加えたときのサンプル&ホールド出力は 200Hz の入力を加えたときと同じ階段波形になります。その階段波を  $G(s)$  に加えた出力  $Y(s)$  の 200Hz 成分を 200Hz の伝達特性として観測し、同じ波形の 3.8kHz 成分を、3.8kHz の伝達特性として観測しているわけです。サンプリング系の場合は、ナイキスト周波数より高い周波数は信号として加えないのが原則です。ナイキスト周波数以下の特性であれば、(b)式でも(c)式でもほぼ同じ特性になっています。